



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



## تخمین بهینه پارامترهای مدل ماسکینگام در روندیابی مستقیم و معکوس

پگاه بهنام<sup>۱</sup>، محمد شایان نژاد<sup>۲</sup>

۱- کارشناس ارشد سازه‌های آبی Email: p.behnam96@yahoo.com

۲- استادیار گروه مهندسی آب دانشگاه صنعتی اصفهان

### چکیده

در روش‌های روندیابی هیدرولوژیکی مانند روش ماسکینگام، هیدروگراف جریان در طی روندیابی در یک نقطه واقع در پایین دست محاسبه می‌گردد. در روندیابی معکوس با استفاده از هیدروگراف سیل پایین به هیدروگراف سیل بالادست می‌توان دست یافت. در این تحقیق با استفاده از یکسری داده‌های مشاهده‌ای ویلسون (۱۹۷۴) و حل عددی معادله پیوستگی جریان به روش رانگ کوتا مرتبه چهارم و ترکیب آن با معادله ذخیره ماسکینگام بصورت‌های خطی و دو نوع غیر خطی (نوع اول و دوم) و تخمین پارامترهای آن به روش بهینه‌سازی، روندیابی مستقیم و معکوس سیل انجام شده است و نتایج نشان داد که تخمین پارامترها به طور مجزا برای هریک از روندیابی‌های مستقیم و معکوس انجام شود. همچنین مدل غیر خطی نوع اول روندیابی مستقیم و معکوس بالاترین دقت را داشت.

**کلمات کلیدی:** معادله پیوستگی، روندیابی سیل، ماسکینگام، تخمین پارامتر، مدل غیر خطی

### مقدمه

یکی از مسائل عمده مهندسی هیدرولوژی پیش‌بینی چگونگی طغیان و فروکش سیل یا صعود و نزول هیدروگراف سیل در نقطه مشخصی از رودخانه است. این مسئله را می‌توان با استفاده از روش‌های روندیابی سیل مورد تحلیل قرار داد. روش‌های روندیابی سیل دو گروه می‌باشند. در یکی از این گروه‌ها از معادله پیوستگی جریان و رابطه بین دبی و ذخیره موقت آب در طول مسیر استفاده می‌شود و در این حالت روش روندیابی هیدرولوژیکی است. روندیابی هیدرولوژیکی در رودخانه‌ها بر مبنای معادله پیوستگی جریان به شرح زیر بنا نهاده شده است:

$$I(t) - O(t) = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

که در معادله فوق:

$I(t)$  = دبی یا جریان ورودی در زمان  $t$ ،  $O(t)$  = دبی یا جریان خروجی در زمان  $t$ ،  $\frac{ds}{dt}$  = تغییرات ذخیره آب نسبت به

زمان

جهت روندیابی جریان، اگر هیدروگراف ورودی  $I(t)$  معلوم باشد، نمی‌توان معادله بالا را به طور مستقیم جهت تعیین هیدروگراف خروجی  $O(t)$  حل نمود، زیرا هر دو عامل  $S$ ،  $O$  مجهولند. لذا نیاز به یک رابطه دیگر است، که آن را اصطلاحاً تابع ذخیره می‌نامند. این تابع به سه شکل زیر ارائه شده است:

مدل خطی

$$S = K[XI + (1 - X)O] \quad (2)$$



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



مدل غیر خطی نوع اول :

$$S = K [XI + (1 - X)O]^m \quad (3)$$

مدل غیر خطی نوع دوم :

$$S = K [XI^m + (1 - X)O^m] \quad (4)$$

که در روابط فوق:

$X$  = ضریب وزنی،  $K$  = ثابت ذخیره و  $m$  = توان مدلهای غیر خطی بوده و این سه پارامتر بایستی به روش مناسبی تخمین زده شوند.

در روندیابی مستقیم با هیدروگراف بالادست هیدروگراف پایین دست راجهت تعیین ظرفیت سرریزها و تعیین وضعیت هیدروگراف سیل در پایاب رودخانه‌ها می‌توان بدست آورد. در برخی موارد بعد از گذر سیل مخرب نیاز به اطلاعات درباره ویرانی سیل در بالادست است که ممکن ایستگاه آب‌سنجی در بالادست موجود نباشد و یا مفقود شده باشد و یا جهت تخمین هزینه مقاوم سازی و نوسازی در بالادست که باید متناسب با سیل عبوری باشد، که با استفاده از روندیابی معکوس می‌توان به اطلاعات هیدروگراف سیل ورودی دست یافت. و از دیگر مواد کاربرد روندیابی معکوس می‌توان کالیبراسیون ایستگاه‌های آب‌سنجی بالادست را نام برد. روش روندیابی جریان ماسکینگهام توسط کارتی (۱۹۳۸)، جهت مطالعات کنترل سیل در حوضه رودخانه اهیو ارائه شده است. کاربرد روش ماسکینگهام مستلزم دو مرحله کالیبره و پیش بینی است. در مرحله کالیبره تخمین پارامترهای مدل ماسکینگهام با توجه به هیدروگراف‌های ورودی و خروجی مشاهده شده قبلی صورت می‌گیرد. در مرحله بعد به حل مسئله روندیابی می‌پردازد.

HEC-1 (سازمان ارتش آمریکا ۱۹۸۶) با استفاده از آنالیزهای رگرسیون بین هیدروگراف خروجی و محاسبه شده روندیابی بهینه را ارائه نمود. ویلسون (۱۹۷۴) یک سری اطلاعات هیدروگراف ورودی خروجی جهت کالیبراسیون مدل‌های غیر خطی ماسکینگهام ارائه نموده و اطلاعات ویلسون توسط محققان بسیاری جهت کالیبراسیون و بررسی روش‌های مختلف تخمین پارامتر استفاده می‌شود. گیل (۱۹۷۸)، تانگ (۱۹۸۵)، یان و پادمانابهان (۱۹۹۳)، مهان (۱۹۹۷)، داس (۲۰۰۴) روش‌های مبنی بر آنالیزهای رگرسیون بین ذخیره مشاهده شده و فرضی یا بین جریان خروجی مشاهده شده و پیش بینی شده جهت تخمین پارامترهای ماسکینگهام ارائه نمودند. گیل (۱۹۷۸) برای مدل‌های غیر خطی با در نظر گرفتن سه نقطه و دستگاه معادلات روندیابی غیر خطی با حداقل کردن مجموع مربعات خطا، پارامترها را تخمین زد. تانگ (۱۹۸۵) با سه روش HJ+LR و HJ+CG و HJ+DFP پارامترهای مدل غیر خطی نوع اول را بدست آورد. یان و پادمانابهان (۱۹۹۳) از روش حداقل مجموع مربعات خطا همراه با برنامه نویسی غیر خطی، مهان (۱۹۹۷) با استفاده از الگوریتم ژنتیک مبنی بر حداقل خطا بین خروجی مشاهده‌ای و محاسبه‌ای، داس (۲۰۰۴) از روش ضریب لا گرانتز همزمان با حداقل مجموع مربعات خطا بین خروجی مشاهده‌ای و محاسبه‌ای، داس (۲۰۰۹) از روش ضریب لا گرانتز همزمان با حداقل مجموع مربعات خطا بین ورودی مشاهده‌ای و محاسبه‌ای، پارامترهای مدل را تخمین زدند.

در این تحقیق با استفاده از داده‌های ویلسون، معادله پیوستگی جریان با ترکیب معادلات ذخیره ماسکینگهام بصورت خطی و غیر خطی به روش حل عددی رانگ کوتا مرتبه چهارم حل گردیده است و با تخمین پارامترهای آن به روش بهینه سازی، روندیابی مستقیم و معکوس سیل انجام شده است.



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



## مواد و روشها:

معادله پیوستگی جریان از معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول محسوب می شود. یکی از روش های حل عددی این معادلات روش رانگ - کوتا است، این روش مراتب مختلفی دارد. در این مقاله از روش رانگ کوتا مرتبه چهارم برای روندیابی همگام با روش بهینه سازی جهت تخمین پارامترها بصورت زیر استفاده شده است:

## روندیابی مستقیم:

روندیابی مستقیم عبارت از بدست آوردن هیدروگراف پایین دست با استفاده از بالادست. سه مدل تابع ذخیره ماسکینگهام جهت روندیابی بصورت های زیر استفاده شده است:

الف) تابع ذخیره غیر خطی نوع اول:

اگر معادله ۳ بر حسب O در زمان I نوشته شود معادله زیر بدست می آید:

$$O_i = \frac{1}{1-X} \left( \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - XI_i \right) \quad (5)$$

با جایگذاری معادله ۵ در معادله ۱ معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{ds}{dt_i} = \frac{1}{1-X} \left( I_i - \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (6)$$

معادله ۶ را می توان به روش رانگ کوتای مرتبه چهارم حل نمود، که حل آن بصورت زیر است:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (7)$$

که در آن:

$$k_1 = \frac{dt}{1-X} \left( I_i - \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (8)$$

$$k_2 = \frac{dt}{1-X} \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \left( \frac{S_i + \frac{k_1}{2}}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (9)$$

$$k_3 = \frac{dt}{1-X} \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \left( \frac{S_i + \frac{k_2}{2}}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (10)$$

$$k_4 = \frac{dt}{1-X} \left( I_{i+1} - \left( \frac{S_i + k_3}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (11)$$

در ابتدا  $X, k, m$  را فرض کرده و از معادله ۳ مقدار  $S_i$  و سپس از رابطه ۷ مقدار  $S_{i+1}$  را محاسبه کرده و از رابطه زیر می توان هیدروگراف خروجی را بدست آورد.

$$O_{i+1} = \frac{1}{1-X} \left( \left( \frac{S_{i+1}}{k} \right)^{\frac{1}{m}} - XI_{i+1} \right) \quad (12)$$

رابطه فوق بر اساس رابطه ۵ نوشته شده است.

ب) تابع ذخیره غیر خطی نوع دوم:



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



با حل معادله ۴ بر حسب  $O$  در زمان  $I$  معادله زیر بدست می آید:

$$O_i = \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i}{K} - XI_i^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (13)$$

با جایگذاری معادله ۱۳ در معادله ۱، بدست می آید:

$$\frac{ds}{dt_i} = I_i - \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i}{K} - XI_i^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (14)$$

در ابتدا  $X, K, m$  را فرض کرده و از معادله ۴ مقدار  $S_i$  و سپس از رابطه ۷ مقدار  $S_{i+1}$  را محاسبه کرده، که ضرائب به صورت زیر است:

$$k_1 = dt \left( I_i - \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i}{K} - XI_i^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (15)$$

$$k_2 = dt \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i + \frac{k_1}{2}}{K} - X \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \right)^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (16)$$

$$k_3 = dt \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i + \frac{k_2}{2}}{K} - X \left( \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \right)^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (17)$$

$$k_4 = dt \left( I_{i+1} - \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_i + k_3}{K} - X \left( I_{i+1} \right)^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (18)$$

سپس از رابطه زیر هیدروگراف خروجی محاسبه می شود.

$$O_{i+1} = \left( \frac{1}{1-X} \left( \frac{S_{i+1}}{K} - XI_{i+1}^m \right) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (19)$$

ج) تابع ذخیره خطی:

همانند تابع ذخیره غیر خطی نوع اول با فرض توان یک است.

در همه توابع سه گانه فوق بایستی ضرائب  $X, K, m$  با روش بهینه سازی بدست آید. برای این منظور بایستی یک تابع هدف تعریف شود. در این تحقیق تابع هدف میزان خطا می باشد که بصورت زیر تعریف شده است:

$$C = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{O_i - O_{oi}}{O_{oi}} \right)^2 \quad (20)$$

$O_{oi}$  = مقادیر دبی خروجی مشاهده شده،  $O_i$  = مقادیر دبی خروجی محاسبه شده با استفاده از روابط فوق (معادلات ۱۲ و ۱۹)،  $n$  = تعداد دبی محاسباتی است.

برای مقادیر محاسبه ای نیاز به هیدروگراف های ورودی و خروجی معلوم می باشد که در این تحقیق از داده های ویلسون (۱۹۷۴) استفاده شده است. همچنین نیاز به  $X, K, m$  می باشد که ابتدا آنها را فرض نموده و سپس آنها را با استفاده از نرم افزار lingo بصورتی تغییر داده که حداقل  $C$  بدست آید. پس از آن می توان با استفاده از این ضرائب هر هیدروگراف دیگری را روندیابی نمود.

روندیابی معکوس:



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



الف) تابع ذخیره غیر خطی نوع اول:

معادله ۳ را بر حسب I در زمان I بصورت زیر نوشته:

$$I_i = \frac{1}{X} \left( \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1-X}{X} O_i \right) \quad (21)$$

با جایگذاری معادله ۳ در معادله ۱، معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{ds}{dt_i} = \frac{1}{X} \left( \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - O_i \right) \quad (22)$$

در ابتدا m, X, K را فرض کرده و از معادله ۳ مقدار  $S_i$  و سپس از رابطه ۷ مقدار  $S_{i+1}$  را محاسبه کرده، که ضرائب به صورت زیر است:

$$k_1 = \frac{dt}{x} \left( \left( \frac{S_i}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - O_{i+1} \right) \quad (23)$$

$$k_2 = \frac{dt}{x} \left( \left( \frac{S_i + \frac{k_1}{2}}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right) \quad (24)$$

$$k_3 = \frac{dt}{x} \left( \left( \frac{S_i + \frac{k_2}{2}}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right) \quad (25)$$

$$k_4 = \frac{dt}{x} \left( \left( \frac{S_i + K_3}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - O_{i+1} \right) \quad (26)$$

سپس از رابطه زیر هیدروگراف ورودی بدست می‌آید.

$$I_{i+1} = \frac{1}{X} \left( \left( \frac{S_{i+1}}{K} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1-X}{X} O_{i+1} \right) \quad (27)$$

ب) تابع ذخیره غیر خطی نوع دوم:

با حل معادله ۴ بر حسب I در زمان I معادله زیر بدست می‌آید:

$$I_i = \left( \frac{S_i}{XK} - \frac{1-X}{X} O_i^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (28)$$

با جایگذاری معادله ۲۸ در معادله ۱، معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{ds}{dt_i} = \left( \frac{S_i}{XK} - \frac{1-X}{X} O_i^m \right)^{\frac{1}{m}} - O_i \quad (29)$$

در ابتدا m, X, K را فرض کرده و از معادله ۴ مقدار  $S_i$  و سپس از رابطه ۷ مقدار  $S_{i+1}$  را محاسبه کرده، که ضرائب آن به صورت زیر است:

$$k_1 = dt \left( \left( \frac{S_i}{XK} - \frac{1-X}{X} (O_i)^m \right)^{\frac{1}{m}} - O_i \right) \quad (30)$$

$$k_2 = dt \left( \left( \frac{S_i + \frac{k_1}{2}}{XK} - \frac{1-X}{X} \left( \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} - \left( \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right) \right) \quad (31)$$



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



$$k_3 = dt \left( \left( \frac{S_i + \frac{k_2}{2}}{XK} - \frac{1-X}{X} \left( \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} - \left( \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right) \right) \quad (32)$$

$$k_4 = dt \left( \left( \frac{S_i + k_3}{XK} - \frac{1-X}{X} (O_{i+1})^m \right)^{\frac{1}{m}} - O_{i+1} \right) \quad (33)$$

سپس از رابطه زیر می‌توان هیدروگراف ورودی را بدست آورد.

$$I_{i+1} = \left( \frac{S_{i+1}}{XK} - \frac{1-X}{X} O_{i+1}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (34)$$

ج) تابع ذخیره خطی:

همانند تابع ذخیره غیر خطی نوع اول با توان یک است.

در این حالت تابع هدف مانند روندیابی مستقیم است. با این تفاوت که بجای O از I استفاده می‌شود.

## نتایج و بحث:

با توجه به آن که دقت روندیابی با روش ماسکینگهام وابسته به دقت پارامترهای تخمین زده شده می‌باشد. در این تحقیق مفهوم روندیابی مستقیم و معکوس با روش حل عددی رانگ کوتا مرتبه چهارم با توجه به اهمیت تخمین بهینه پارامترها مطرح گردیده است. با ارزیابی تابع هدف و بررسی تطابق بین هیدروگراف مشاهده ای و روندیابی، در مدل غیر خطی نوع اول، در زمان وقوع و مقدار پیک در هیدروگراف روندیابی مستقیم و معکوس بسیار نزدیک به مقدار مشاهده ای است (شکل ۲ا). ایده آل آن است که پارامترهای سه گانه در روندیابی مستقیم بایستی با روندیابی معکوس یکسان باشد، اما به دلیل خطاهای اندازه گیری این اتفاق نمی‌افتد و نیاز است که پارامترها بصورت مجزا برای هر یک از روندیابی مستقیم و معکوس تخمین زده شود (جدول ۲ا).

جدول ۱- جدول پارامتر روندیابی مستقیم

مدل غیر خطی اول	مدل غیر خطی دوم	مدل خطی	
۰/۲۶۷	۰/۱۰۰	۰/۱۹۰	X
۰/۰۹۱	۰/۰۴۹	۲۵/۶۰۰	K
۲/۲۶۲	۲/۳۷۱	۰/۱۰۰	M
۰/۰۲۰	۰/۴۰۰	۰/۳۸۰	C

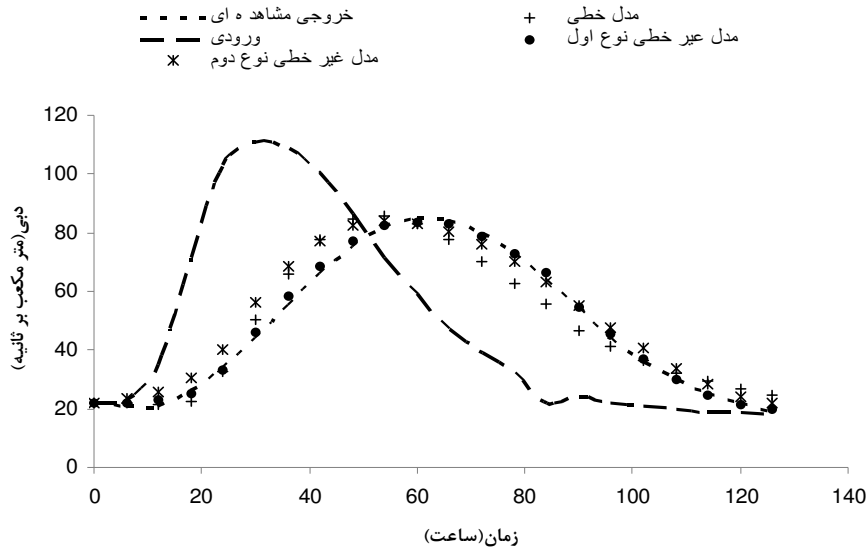


# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)



National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

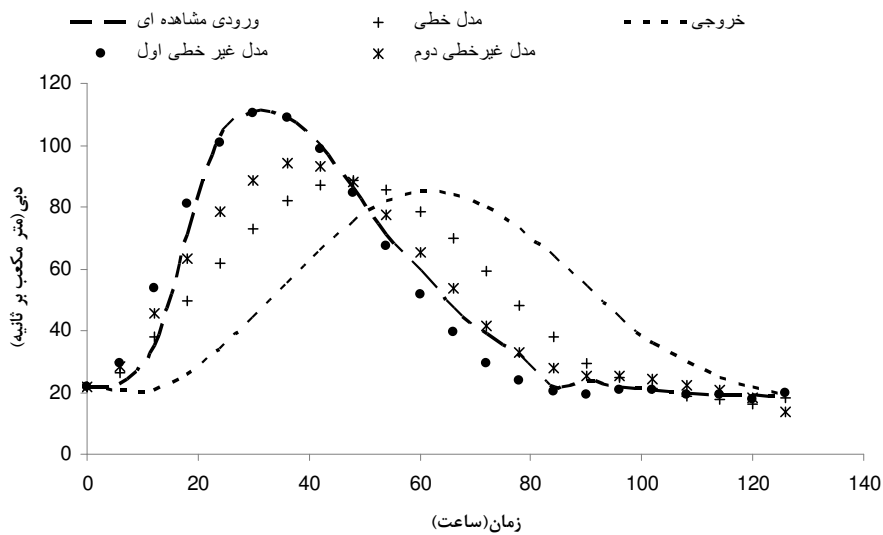
شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



شکل ۱- هیدروگراف های روندیابی مستقیم

جدول ۲- جدول تخمین پارامتر روندیابی معکوس

مدل خطی	مدل غیر خطی دوم	مدل غیر خطی اول	
۰/۳۳۰	۰/۳۴۱	۰/۲۹۱	X
۱۶/۲۴۵	۰/۰۶۴	۰/۱۰۷	K
۱/۰۰۰	۲/۹۱	۲/۲۶۲	M
۱/۹۹۰	۰/۵۲۰	۰/۶۲۰	C



شکل ۲- هیدروگراف های روندیابی معکوس



# همایش ملی انتقال آب بین حوضه‌ای (چالش‌ها و فرصت‌ها)

National Conference on Inter-Basin Water Transfer  
(Opportunities & Challenges)

شهرکرد - سوم خرداد ۱۳۹۱



منابع:

- Cung, J.A.1965. On The Subject of a Flood Propagation Computation Method(Muskingum Method), journal of Hydr. Res 79(2): 205-230.
- Das A. 2004. Parameter for Muskingum models, journal of Irrigation and Drainage Eng. ASCE 130(2):140-147.
- Das A. 2009. Reverse stream flow routing by using Muskingum models. Civil engineering department, National institute of technology, Durgapur 713209:483-499.
- Gill MA. 1978. Flood routing by the Muskingum river routing. In Proce. ASCEWRPMD Spec. Conf: 353-363.
- McCarthy G.T. 1938. The unit hydrograph and flood routing. Presented, Conf. of North Atlantic Division ,U.S .ARNY Corps of Engineers
- Mohan S. 1997. Parameter estimation of nonlinear Muskingum models using genetic algorithm. J. Hydraulic Eng, 123(2):137-142.
- Tung Y-K. 1985. River flood routing by nonlinear Muskingum method. Journal of Hydraul. Div .Am .Soc .Civ. Eng, 111(2) :1447-1460.
- U.S. Army Corp of Engineers (USACE) .1998 .Flood hydrograph package user's manual .Flood Hydrograph Package .HEC-1 ,Report No.CPD-IA .Hydraulic Engineering Center ,Davis, Calif
- Wilson EM. 1974. Engineering Hydrology. (Hampshire .U.K. MacNillan Education Ltd. Hampshire, u. k.
- Yoon J., G. Padmanabhan. 1993. Parameter estimation of linear and nonlinear Muskingum models, journal of Water Planning and Management, ASCE 119 5:600-610.